b) En déduire la limite de la suite (I_n)

on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

$I_n \geq 0$ et $I_{n+2} \geq 0$

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

et on a $I_n \geqslant 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

3) Calculer I_2 et I_4

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(x) - 1\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \tan^2(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, dx$$

$$= \left[\tan(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) - \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$